MATIÈRES A OPTION

(Option générale)

Mathématiques, Sciences physiques, Biologie

DURÉE : 3 heures

MATHÉMATIQUES

PARTIE I

NOTE : Dans tout le problème, on posera $0^0 = 1$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance et une variance.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On note p_k la probabilité de l'événement $\{X = k\}$.

1° Soit s un réel appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. Montrer que la série de terme général $u_k = p_k s^k$ est absolument convergente.

2° A la variable aléatoire X on associe, une fonction g définie sur $[-1, +1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est la fonction génératrice de X définie par :

$$\forall s \in [-1, 1],\ g : s \to g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k .$$

a. Montrer que $g(0) = p_0$ et $g(1) = 1$.

b. Soit X une variable aléatoire de Bernouilli (c'est-à-dire suivant une loi définie par $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$). Calculer sa fonction génératrice.

c. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer sa fonction génératrice.

3° Soit $s \in [-1, 1]$. Montrer que la série de terme général $v_k = \dfrac{d}{ds}(p_k s^k)$ et la série de terme général $w_k = \dfrac{d^2}{ds^2}(p_k s^k)$ sont absolument convergentes.

(On note respectivement $\dfrac{d}{ds}(p_k s^k)$ et $\dfrac{d^2}{ds^2}(p_k s^k)$ les dérivées première et seconde par rapport à s de la fonction $s \to p_k s^k$).

4° On admettra que g est deux fois dérivable sur $[-1, 1]$ et que ses dérivées première et seconde sont respectivement :

$$g'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{ds}(p_k s^k) \quad \text{et} \quad g''(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2}{ds^2}(p_k s^k).$$

Montrer que $E(x) = g'(1)$. En déduire l'expression de la variance de X en fonction de $g'(1)$ et $g''(1)$. Utiliser ces résultats pour calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires de loi de Bernouilli et de loi de Poisson.

5° Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $Z = X + Y$. On note respectivement f, g et h les fonctions génératrices de X, Y et Z.

En écrivant que :

$$P_r(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P_r(X = i \text{ et } Y = k - i)$$

montrer que $h = g \cdot f$ (c'est-à-dire : $\forall s \in [-1, 1]$, $h(s) = f(s) \times g(s)$).

Ce résultat pourra être utilisé par la suite, même s'il n'est pas démontré.

6° Soient $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ n variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, de même loi. On note Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$.

.../...

Montrer que $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ont même fonction génératrice. On la notera g.

Exprimer en fonction de g la fonction génératrice de Z_n. Déduire de ce qui précède l'expression de la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

PARTIE II

Dans une population, on s'intéresse aux générations successives d'individus présentant une certaine caractéristique transmise héréditairement.

Soit X_i ($i \in \mathbb{N}$) la variable aléatoire représentant le nombre d'individus de la $i^{ème}$ génération, et soit ξ_k la variable aléatoire représentant le nombre de descendants du $k^{ième}$ individu de cette génération. On suppose que la loi de ξ_k ne dépend ni de l'individu k, ni de la génération i considérée. On remarquera que, si $X_n = j$, alors $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{j} \xi_k$ et que, par conséquent, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $X_n = j$ est la loi de la somme de j variables aléatoires indépendantes équidistribuées $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j$. Dans toute la suite on supposera que $X_0 = 1$.

1° On note g la fonction génératrice des variables aléatoires ξ_i ($i \in \mathbb{N}$). Montrer que : $\forall s, s \in [-1, +1]$ on a $g(s) \in [-1, +1]$. On note $g^{(2)}, g^{(3)}, \ldots, g^{(n)}$, les fonctions composées successives de la fonction g, définies par :

$$g^{(2)} = g \circ g,\ g^{(3)} = g \circ g^{(2)},\ \ldots,\ g^{(n)} = g \circ g^{(n-1)}.$$

a. Soit g_1 la fonction génératrice de X_1. Montrer que $g_1 = g$.

b. Soit g_n la fonction génératrice de X_n. Montrer par récurrence que $g_n = g^{(n)}$.

2° On pose $m = E(\xi_i) = E(X_1)$ espérance des ξ_i
et $\sigma^2 = \text{var}(\xi_i) = \text{var}(X_1)$ variance des ξ_i.

Montrer que :

$E(X_n) = m^n$ et que $\text{Var}(X_n) = \sigma^2 m^{n-1} [1 + m + \ldots + m^{n-1}]$.

Comment varie $\text{Var}(X_n)$ en fonction de n ?

154

PARTIE III

Cette partie est indépendante des parties I *et* II, *sauf en ce qui concerne les notations et la question* 6°.

On conserve les notations introduites dans les parties I et II, : $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont des variables aléatoires à valeurs entières, indépendantes, de même loi et de fonction génératrice g :

$$s \to g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \qquad \text{où} \qquad p_k = p(\xi = k), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

On rappelle que $g(0) = p_0$ et $g(1) = 1$.

Dans toute la suite, on supposera $p_0 \neq 0, p_0 \neq 1, p_0 + p_1 \neq 1$ et $p_2 > 0$.

1° Montrer que la fonction g et sa dérivée g' par rapport à s sont des fonctions strictement croissantes sur $[0, 1]$.

2° On pose $m = g'(1)$.

a. Montrer que si $m \leqslant 1$, alors $\forall s \in [0, 1[$, $g(s) > s$ (on pourra étudier la fonction $s \to g(s) - s$ sur $[0, 1]$).

b. De la même façon, montrer que si $m > 1$, alors il existe un réel unique $q \in [0, 1[$ tel que :

$$\begin{cases} \forall s \in [0, q[& g(s) > s \\ g(q) = q & \\ \forall s \in]q, 1[& g(s) < s \end{cases}$$

c. Représenter dans les 2 cas *a.* et *b.* dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan l'allure de la courbe représentative de la restriction de g à l'intervalle $[0, 1]$.

.../...

3° On rappelle que g_n, fonction génératrice de X_n, est la $n^{ième}$ composée de la fonction g (démontré en II. 1°). On se propose d'étudier le comportement de la probabilité $P(X_n = 0)$ lorsque n devient très grand.

Montrer que, s'il existe π élément de $\mathbb{R}$ tel que $\pi = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0)$, alors $\pi = \lim\limits_{n \to +\infty} P(\exists r,\ 1 \leqslant r \leqslant n\ ;\ X_r = 0)$ et $\pi = P(\exists r,\ r \geqslant 1\ ;\ X_r = 0)$

π sera appelé la probabilité d'extinction du processus.

4° Montrer que $P(X_n = 0) = g_n(0)$

5° Pour calculer π, on étudie la suite $u_n = g_n(x)$ $(n \geqslant 1)$ où x est un réel fixé de $[0, 1]$. On conserve les notations des questions précédentes : q est la plus petite racine de l'équation $g(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$, et on rappelle que si $m \leqslant 1$ alors $q = 1$ et si $m > 1$ alors $q < 1$. Montrer que :

a. Pour $x \in [0, q[$ la suite u_n est croissante et admet pour limite q lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Pour $x \in]q, 1[$ la suite u_n est décroissante et admet pour limite q lorsque n tend vers $+\infty$. (On suppose ici $m > 1$.)

c. Pour $x = q$ ou $x = 1$ la suite u_n est constante.

En déduire la probabilité d'extinction π du processus.

6° *Application :* un gène mutant apparaît dans une population à une certaine génération que l'on numérote 0 ($X_0 = 1$). On suppose que, à chaque génération, le nombre de descendants du gène considéré (variable aléatoire ξ définie en II.) suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a. Quelle est la probabilité d'extinction π de ce gène ?

b. Dans quel cas l'extinction est-elle certaine ?

c. Pour $\lambda = 1{,}3$, donner une valeur approchée de π à l'aide d'une méthode graphique.

FIN